2023

1º Semestre

MATEMÁTICA

Prova Discursiva

VESTIBULAR FGV

UNIFICADO

15/11/2022

RESOLUÇÃO

Pergunta 1

Eduardo tem dois caminhos, *A* e *B*, para ir de sua casa até a empresa em que trabalha. O caminho *A* tem 6400 metros de comprimento e o caminho *B* tem 4500 metros. Pelo caminho *A*, Eduardo consegue fazer uma velocidade média de 60 km/h; pelo caminho *B*, ele consegue fazer uma velocidade média de 36 km/h.

a) Qual dos caminhos, *A* ou *B*, Eduardo percorre em menos tempo? **Justifique a sua resposta**

Resposta: Caminho *A*.
Justificativa: Tem-se:
Caminho A: 60 km/h = 1000 m/min. Assim, Eduardo percorre o caminho *A* em (6400 m) / (1000 m/min) = 6,4 min.
Caminho B: 36 km/h = 600 m/min. Assim, Eduardo percorre o caminho B em (4500 m) / (600 m/min) = 7,5 min.

OBS.: Também aceitar outras contas com ou sem transformações de unidades. Por exemplo:
Caminho *A*: (6400 m) / (60 km/h) = 106,66... m/(km/h)
Caminho *B*: (4500 m) / (36 km/h) = 125 m/(km/h).

b) Qual é a diferença de tempo, em segundos, entre os dois caminhos? **Basta fornecer a resposta.**

Resposta: 66s.

Resolução:
A diferença de tempo é $7{,}5 - 6{,}4 = 1{,}1$ min $= 1{,}1 \times 60$ s $= 66$s.

Pergunta 2

Em um show de rock, os adultos representam $\frac{7}{16}$ do total de pessoas presentes. Com a chegada de um ônibus de turismo com mais 60 pessoas, os adultos passaram a representar $\frac{13}{30}$ do total de pessoas presentes.

a) É possível que o número de pessoas presentes antes da chegada do ônibus de turismo fosse 160? **Justifique a sua resposta.**

Resposta: Não.
Justificativa: Sendo N o número de pessoas presentes ao show antes da chegada do ônibus, como o número de adultos é $\frac{7}{16}$ de N, tem-se que N tem que ser múltiplo de 16. Além disso, como após a chegada do ônibus o número de adultos é $\frac{13}{30}$ de $(N + 60)$ e 60 é múltiplo de 30, então N também tem que ser múltiplo de 30. Logo, como 160 não é múltiplo de 30, o número de pessoas presentes ao show antes da chegada do ônibus não pode ser 160.

b) Qual é o número mínimo de adultos presentes, após a chegada do ônibus de turismo? **Basta fornecer a resposta.**

Resposta: 130.

Resolução:
O número mínimo de adultos ocorrerá quando o número de pessoas presentes ao show for mínimo. Como N tem que ser múltiplo de 16 e de 30, então o valor mínimo de N é o mínimo múltiplo comum de 16 e 30, isto é, 240. Logo, após a chegada do ônibus, o número mínimo de adultos é $\frac{13}{30}(240 + 60) = 130$.

Pergunta 3

Determine a quantidade de conjuntos que podem ser formados por dois números naturais distintos entre 1 e 401, inclusive, cuja soma seja par. **Justifique a sua resposta.**

Resposta: 40000.

Justificativa: Existem duas maneiras de formar um conjunto {a, b} de modo que a+b seja par. Ou a e b são pares ou a e b são ímpares.
O número de conjuntos {a, b} em que ambos são pares é $N_{pares} = \frac{200 \cdot 199}{2} = 19900$. O número de conjuntos {a,b} em que ambos sejam ímpares é $N_{ímpares} = \frac{201 \cdot 200}{2} = 20100$. Portanto, o número pedido é $N_{pares} + N_{ímpares} = 40000$

Pergunta 4

Considere a sequência definida por:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 2$
- $a_3 = 3$
- $a_n = a_{n-3} + a_{n-1}$, para todo inteiro $n \geq 4$

Com relação a essa sequência:

a) a_{2022} é um número par ou ímpar? **Justifique a sua resposta**

Resposta: Ímpar;

b) E a_{2023}? **Justifique a sua resposta**

Resposta: Ímpar;

Justificativas: representando par e ímpar por "p" e "i", respectivamente, tem-se que as paridades dos termos da sequência dada são definidas pelas paridades dos 3 primeiros termos, a saber i, p, i. Tem-se, então:
i, p, i, p, p, i, i, **i, p, i**, p, p, i, i, **i, p, i**, ...
Como se vê, as paridades se repetem de 7 em 7.
Assim, como $2022 = 7 \times 288 + 6$, a paridade do termo a_{2022} é a mesma do sexto termo da sequência "i, p, i, p, p, i, i", ou seja, "i" (ímpar).
Como $2023 = 7 \times 289$, a paridade do termo a_{2023} é a mesma do sétimo termo da referida sequência, ou seja, "i" (ímpar).

Pergunta 5

Manuel fabrica e vende um produto que, até o momento, é livre de imposto. Manuel vende cada unidade do produto por um preço *P*.
O governo quer passar a cobrar imposto sobre este produto. Estuda-se um valor de alíquota de *x*. Isto significa que um percentual *x* do preço de venda de cada unidade deste produto será destinado ao pagamento do imposto.
Manuel está pensando em quanto terá que reajustar o preço para incluir o imposto cobrado. Ele quer fazer um ajuste percentual *y* no preço, de modo que a receita que ele obterá com a venda de uma unidade do produto, após descontar o imposto, se mantenha a mesma que a atual.

a) Se a alíquota do imposto for de $x = 50\%$, quanto deverá ser o reajuste *y*? **Justifique a sua resposta.**

Resposta: 100%.
Justificativa: Se $x = 50\%$, então metade do preço final será destinado ao imposto. Portanto, a metade que sobra é a receita do Manuel, que é o preço atual. Assim, Manuel precisa dobrar o preço atual para que, após o desconto, fique com a mesma receita. Ou seja, $y = 100\%$

b) Encontre uma expressão que descreva *y* como função de uma alíquota qualquer *x*, com $0 < x < 100\%$. **Basta fornecer a resposta.**

Resposta: $y = \frac{1}{1-x} - 1$ ou $y = \frac{x}{1-x}$

Resolução: Tem-se: $P(1 + y)(1 - x) = P \rightarrow y = \frac{1}{1-x} - 1$ ou $y = \frac{x}{1-x}$

Pergunta 6

Sejam $f(x) = 2x - 2$, $g(x) = 7 - x$ e $h(x) = mínimo(f(x), g(x))$ funções reais de variável real. Determine o valor máximo que a função $h(x)$ pode atingir. **Justifique a sua resposta.**

Obs: a função $mínimo(a, b)$ retorna o menor valor entre a e b. Por exemplo, $mínimo(5,2) = 2$ e $mínimo(-3,1) = -3$.

Resposta: 4

Justificativa:
As funções f(x) e g(x) são retas, respectivamente, crescente e decrescente em todo o conjunto dos reais. A interseção das duas retas acontece no ponto $2x_i - 2 = 7 - x_i \to x_i = 3$. Assim, quando $x \leq 3$ temos que $f(x) \leq g(x)$. Portanto, quando $x \leq 3$, $h(x) = f(x)$. Como a função $f(x)$ é crescente em x, o máximo que $h(x)$ pode alcançar quando $x \leq 3$ é exatamente quando $x = 3$, ou seja, $f(3) = 4$. Já quando $x \geq 3$, temos que $g(x) \leq f(x)$ e, portanto, $h(x) = g(x)$. Mas $g(x)$ é decrescente e alcança o máximo neste intervalo precisamente quando $x = 3$. Logo, o máximo de $h(x)$ ocorre em $x = 3$ e $h(3) = f(3) = g(3) = 4$

Pergunta 7

Em um torneio de tênis disputado em duas chaves, *A* e *B*, após as rodadas iniciais, restaram dois jogadores em cada chave: André e Antônio na chave *A* e Bruno e Bernardo na chave *B*. Os dois jogos das semifinais serão disputados por jogadores da chave *A* contra jogadores da chave *B* e serão escolhidos através de sorteio. Nos torneios de tênis todos os jogos são eliminatórios e não há empates. No torneio em questão, a probabilidade de qualquer jogador da chave *A* vencer qualquer jogador da chave *B* é $\frac{3}{4}$. Além disso, a probabilidade de Antônio vencer André é $\frac{3}{5}$.

a) De quantas maneiras Antônio pode ser o campeão? **Mostre para cada uma dessas maneiras quais seriam os dois jogos das semifinais e qual seria o jogo da final.**

Resposta: 4 maneiras.
Justificativa:
1. Semifinais: André x Bruno e Antônio x Bernardo;
Final: Antônio x André;
2. Semifinais: André x Bruno e Antônio x Bernardo;
Final: Antônio x Bruno;
3. Semifinais: André x Bernardo e Antônio x Bruno;
Final: Antônio x André;
4. Semifinais: André x Bernardo e Antônio x Bruno;
Final: Antônio x Bernardo.

b) Qual a probabilidade de Antônio ser o campeão? **Basta fornecer a resposta.**

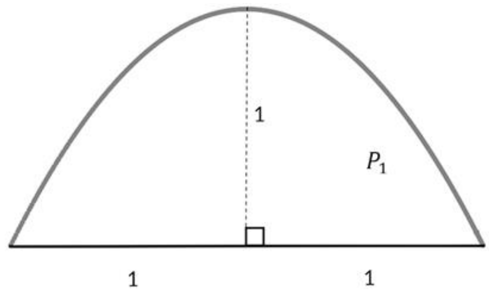
Resposta: $\frac{153}{320}$

Resolução:

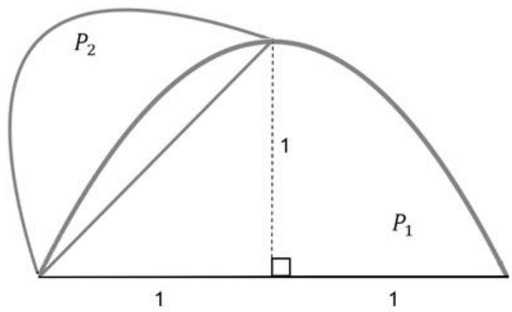
$$P = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{153}{320}$$

Pergunta 8

A figura P_1, desenhada abaixo, é chamada de segmento de parábola. É limitada por um arco de parábola e um segmento de reta perpendicular ao eixo de simetria da parábola. A altura tem 1cm e a base tem 2 cm.



Sobre o segmento de reta que une o vértice inferior esquerdo do segmento de reta ao vértice da parábola foi construído um segmento de parábola P_2, semelhante a P_1,como mostra a figura abaixo.



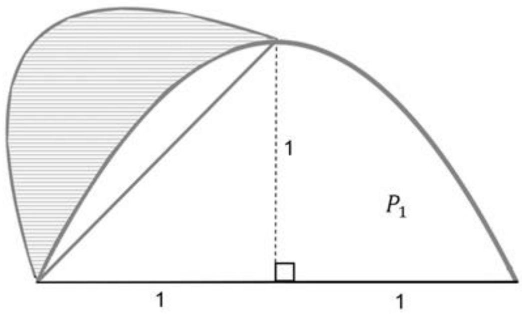
Responda:

a) Qual é a razão entre as áreas de P_1 e P_2? **Justifique a sua resposta.**

Resposta: 2

Justificativa: A razão de semelhança pode ser extraída da base de cada segmento de parábola. A base do segmento P_1 é 2 e a base do segmento P_2 é $\sqrt{2}$, já que é a hipotenusa do triângulo retângulo da figura. Assim, a razão de semelhança é $\frac{2}{\sqrt{2}}$ e, portanto, a razão entre as áreas é o quadrado disto, ou seja, a razão procurada é $\frac{Área(P_1)}{Área(P_2)} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2.$

b) Qual é a área da parte sombreada na figura abaixo? **Justifique a sua resposta.** (obs: a área sombreada corresponde aos pontos de P_2 que não pertencem a P_1).



Resposta: $\frac{1}{2}$

Justificativa: Denote por I a área da interseção dos segmentos parabólicos. Temos que $I = \frac{Área(P_1)}{2} - \frac{1}{2}$, já que é o que sobra de metade de P_1 quando se subtrai o triângulo retângulo de base 1 e altura 1.
Por outro lado, a área sombreada é

$$S = Área(P_2) - I = \frac{Área(P_1)}{2} - \left(\frac{Área(P_1)}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$