MATEMÁTICA

GABARITO OFICIAL DEFINITIVO

QUESTÃO 1

A) (20 PONTOS)

A área sombreada na figura (direita) corresponde a área da coroa circular $A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2$. Assim, a partir do enunciado do problema obtemos:

$A_{coroa} = 20\pi \Rightarrow \pi R^2 - \pi r^2 = 20\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = 20.$ (I)

Por outro lado, $R - r = 2$ donde obtemos $R = 2 + r$ e, substituindo em (I), concluímos:

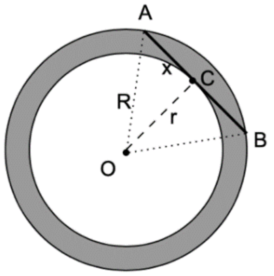
$(r+2)^2 - r^2 = 20 \Rightarrow 4r + 4 = 20$

Portanto $r = 4cm$ e $R = 6cm$.

B) (20 PONTOS)

Seja AB um segmento interno a região sombreada, com o maior comprimento possível. Observe que AB é uma corda do círculo de raio R e deve ser tangente ao círculo de raio r.

Agora sejam O o centro e ambos os círculos e C o ponto de tangência do segmento AB ao círculo menor (veja figura a seguir).



Observe que o triângulo OCB é retângulo em C. Se a medida do cateto AC é x, obtemos pelo teorema de Pitágoras: $R^2 = r^2 + x^2$. Substituindo-se as medidas dos raios obtemos:

$x^2 = 6^2 - 4^2 = 20 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{5}$. Como x deve ser não-negativo concluímos que $x = 2\sqrt{5}$. Portanto o segmento AB tem comprimento $4\sqrt{5}\ cm$.

QUESTÃO 2

A) (24 PONTOS)

Estruturando o sistema linear com base nos dados da tabela presente no enunciado, resulta que:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 6z = 10 \\ 6x + 6y = 12 \\ 9x + 10y + 6z = 22 \end{cases}$$

A terceira equação, por ser combinação linear das duas primeiras equações, pode ser descartada e, dividindo-se a segunda equação por 6, obtém-se:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 6z = 10 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Como o sistema é Possível e Indeterminado, a solução pode ser expressa nas variáveis x, y ou z. No que segue, a solução é apresentada em função da variável x. No entanto, as soluções apresentadas em y ou em z serão consideradas da mesma forma.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 6z = 10\ (Equação\ 01) \\ y = 2 - x \quad (Equação\ 02) \end{cases}$$

Substituindo a $Equação\ 02$ na $Equação\ 01$:

$3x + 4(2 - x) + 6z = 10 \;\Rightarrow\; 3x + 8 - 4x + 6z = 10$

$-x + 6z = 2 \;\Rightarrow\; 6z = 2 + x \;\Rightarrow\; z = \frac{2+x}{6} \qquad (Equação\ 03)$

Note que x, y e z devem ser positivos, pois referem-se à massa de ração (em gramas). Logo:

$$\begin{cases} y = 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ z = \frac{2+x}{6} \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Fazendo a intersecção dos intervalos, obtém-se $0 \leq x \leq 2$.

De acordo com o enunciado, o preço em reais é

$P = 0{,}4x + 0{,}6y + 0{,}7z.$

Substituindo a $Equação\ 02$ e a $Equação\ 03$ na expressão acima, resulta na função.

$P(x) = 0{,}4x + 0{,}6\,(2 - x) + 0{,}7\left(\frac{2+x}{6}\right)$

Então,

$P(x) = 0{,}4x + 1{,}2 - 0{,}6x + \frac{1{,}4 + 0{,}7x}{6}$

Para efeito de simplificação de cálculo, multiplicamos ambos os membros por 60, obtendo:

$60.P(x) = 24x + 72 - 36x + 14 + 7x$

$60.P(x) = -5x + 86$

$P(x) = -\frac{5x}{60} + \frac{86}{60}$

$P(x) = -\frac{x}{12} + \frac{43}{30}$

Assim, temos que a função esperada em relação à variável x é dada por

$P(x) = -\frac{x}{12} + \frac{43}{30}$, com domínio D($P(x)$) = $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$.

De maneira análoga, pode-se obter a função afim em y ($P(y)$) ou em z ($P(z)$).

B) (16 PONTOS)

Para obter-se os valores máximo e mínimo de $P(x)$, substituem-se os extremos de seu domínio na função obtida no item (A). Como a função é afim, do tipo $P(x) = ax + b$, e **decrescente**, tem-se que:

Valor máximo quando $x = 0$.

$$\mathrm{P}(0) = -\frac{0}{12} + \frac{43}{30} \Rightarrow \mathrm{P}(0) = \frac{43}{30}$$

Valor mínimo quando $x = 2$.

$$\mathrm{P}(2) = -\frac{2}{12} + \frac{43}{30} \Rightarrow \mathrm{P}(2) = -\frac{1}{6} + \frac{43}{30} \Rightarrow \mathrm{P}(2) = \frac{-5+43}{30} \Rightarrow \mathrm{P}(2) = \frac{38}{30}$$

Seja $\bar{k}$ a média desses valores, logo

$$\bar{k} = \frac{P(0) + P(2)}{2} = \frac{\frac{43}{30} + \frac{38}{30}}{2} \Rightarrow \bar{k} = \frac{81}{30} . \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{k} = \frac{81}{60}$$

Fazendo $P(x) = \overline{k}$

$$P(x) = -\frac{x}{12} + \frac{43}{30} \Rightarrow \frac{81}{60} = -\frac{x}{12} + \frac{43}{30} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{43}{30} - \frac{81}{60} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{86}{60} - \frac{81}{60}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{5}{60} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = 1$$

Substituindo o valor de $x = 1$ na $Equação\ 02$ e na $Equação\ 03$:

$$\begin{cases} y = 2 - x \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1 \\ z = \frac{2+x}{6} \Rightarrow z = \frac{2+1}{6} \Rightarrow z = \frac{3}{6} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$